مرکز سنجش آموزش مدارس برتر

دوازدهم
ریاضی

آزمون شماره ۳
۲۳ شهریور ۱۴۰۳

پاسخنامه ریاضی ـ فیزیک

ردیف	نام درس	سرگروه	گروه طراحی و بازنگری (به ترتیب حروف الفبا)	ویراستاران
۱	حسابان		حسین شفیع‌زاده ـ مهرداد کیوان	مهدیار شریف ـ فاطمه فرجی
۲	هندسه	مهریار راشدی	حسن محمدبیگی ـ علیرضا شیرازی فرنوش لک	سینا پرهیزکار ـ مهدیار شریف
۳	گسسته	رضا توکلی	رضا توکلی ـ مصطفی دیداری	مهدیار شریف ـ فاطمه فرجی
۴	فیزیک	جواد قزوینیان	مجتبی دانایی ـ محمدمهدی شریفی	محمدرضا خادمی ـ مهدیار شریف
۵	شیمی	مسعود جعفری	محسن خوشدل ـ مراد مدقالچی	محمد داودآبادی ـ کارو محمدی

گروه تایپ و ویراستاری (به ترتیب حروف الفبا)
زهرا احدی ـ امیرعلی الماسی ـ مبینا بهرامی ـ معین‌الدین تقی‌زاده ـ کبری سلیمانی ـ مهرداد شمسی ـ راضیه صالحی ـ انسیه مرزبان

برای اطلاع از اخبار مرکز سنجش آموزش مدارس برتر، به کانال تلگرام @taraaznet مراجعه نمایید.

حسابان

۱. گزینه ۲ صحیح است.

$$\text{صورت کسر} = \sqrt[3]{\sqrt{4\times8}}\times2^n = \sqrt[6]{2^5}\times2^n = 2^{n+\frac{5}{6}}$$

$$\text{مخرج کسر} = \sqrt{\sqrt[3]{8\times2}}\times2^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[6]{2^4}\times2^{-\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}} = 1$$

$$\Rightarrow 2^{n+\frac{5}{6}} = 2 \Rightarrow n+\frac{5}{6} = 1 \Rightarrow n = \frac{1}{6}$$

۲. گزینه ۴ صحیح است.

$$(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab(a+b)$$

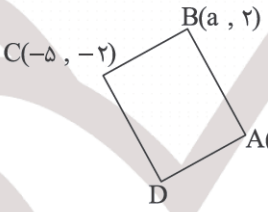
دو طرف تساوی را به توان ۳ می‌رسانیم.

$$x^3 = 16-8\sqrt{3}+16+8\sqrt{3}+3\sqrt[3]{16-8\sqrt{3}}\sqrt[3]{16+8\sqrt{3}}\,x$$

$$\Rightarrow 32+3\sqrt[3]{64(4-3)}x = 32+12x$$

$$\Rightarrow \frac{x^3-20}{x+1} = \frac{32+12x-20}{x+1} = \frac{12x+12}{x+1} = 12$$

۳. گزینه ۴ صحیح است.



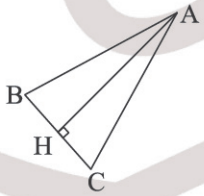
$$m_{AB}\times m_{BC} = -1$$

$$\frac{a-2}{2-a}\times\frac{2+2}{a+5} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{4}{a+5} = 1 \Rightarrow a = -1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AB = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2} \\ BC = \sqrt{4^2+4^2} = 4\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow S = AB.BC = 24$$

۴. گزینه ۱ صحیح است.



فرض کنید $B(a , -3-a)$ باشد. دقت کنید که مختصات C نیز به همین صورت است. فاصلهٔ A از خط BC را پیدا می‌کنیم.

$$AH = \frac{|2+3+3|}{\sqrt{1+1}} = 4\sqrt{2}$$

$$AB = \sqrt{(2-a)^2+(3+3+a)^2} = \sqrt{2a^2+8a+40}$$

$$AB^2 = AH^2+BH^2 \Rightarrow 2a^2+8a+40 = 32+4$$

$$\Rightarrow a^2+4a+2 = 0 \Rightarrow a_1+a_2 = -4$$

۵. گزینه ۲ صحیح است.

$$g(2) = k \Rightarrow g^{-1}(k) = 2 \Rightarrow \frac{k+1}{k-1} = 2 \Rightarrow k = 3$$

$$f^{-1}og(2) = a \Rightarrow g(2) = f(a) \Rightarrow f(a) = 3 \Rightarrow a = 1$$

۶. گزینه ۱ صحیح است.

چون f اکیداً صعودی است، پس کافی است نمودار آن را با $y = x$ تقاطع دهیم.

$$2x+\sqrt{2x+1} = x \Rightarrow \sqrt{2x+1} = -x$$

$$\xrightarrow{x<0} 2x+1 = x^2 \Rightarrow x^2-2x-1 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1-\sqrt{2} \Rightarrow [2(1-\sqrt{2})] = -1$$

۷. گزینه ۴ صحیح است.

فرض کنید $g(x) = ax+b$ باشد، پس:

$$f(x-1) = g(2x+1) = a(2x+1)+b$$

$$\Rightarrow f(x) = a(2x+3)+b$$

$$f(x)+g(x) = 3x+7 \Rightarrow 2ax+3a+b+ax+b = 3x+7$$

$$\Rightarrow 3ax+3a+2b = 3x+7 \Rightarrow \begin{cases} 3a = 3 \\ 3a+2b = 7 \end{cases}$$

پس $a = 1$ و $b = 2$ و $g(x) = x+2$ است. بنابراین $g^{-1}(x) = x-2$ است.

۸. گزینه ۲ صحیح است.

$$y = -x+2\sqrt{1-x} = (\sqrt{1-x}+1)^2-2$$

$$y+2 = (\sqrt{1-x}+1)^2 \Rightarrow \sqrt{1-x}+1 = \sqrt{y+2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-x} = \sqrt{y+2}-1 \Rightarrow 1-x = y+3-2\sqrt{y+2}$$

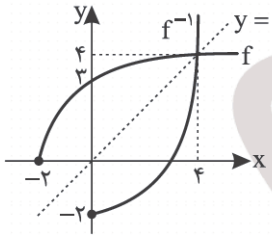
$$\Rightarrow x = 2\sqrt{y+2}-y-2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = 2\sqrt{x+2}-x-2$$

$$\Rightarrow a = 1 , b = -1 \Rightarrow a-b = 2$$

۹. گزینه ۴ صحیح است.

چون $f(x) \geq 0$ است، پس کافی است $x-f^{-1}(x)$ مثبت باشد (به‌جز حالت $x = -2$، که جزء دامنهٔ $f^{-1}(x)$ نیست.)



$$x-f^{-1}(x) > 0$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) < x$$

$$\Rightarrow 0 \leq x < 4$$

$$\Rightarrow \text{خواستهٔ سوال} = 0+1+2+3 = 6$$

۱۰. گزینه ۳ صحیح است.

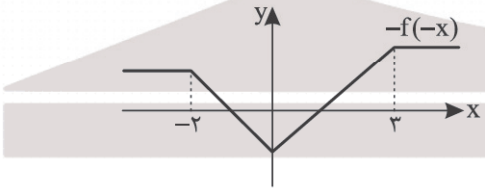
$$(\frac{5}{2})^{1-x^2} > (\frac{2}{5})^{3x+3} \Rightarrow (\frac{2}{5})^{x^2-1} > (\frac{2}{5})^{3x+3}$$

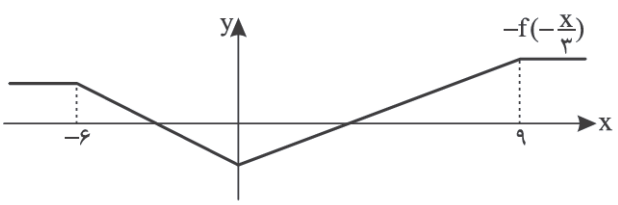
$$\Rightarrow x^2-1 < 3x+3 \Rightarrow x^2-3x-4 < 0$$

$$\Rightarrow -1 < x < 4 \Rightarrow x = 0 , 1 , 2 , 3$$

۱۱. گزینه ۱ صحیح است.

انتقال عمودی و افقی و انبساط و انقباض عمودی، تأثیری در یکنوایی و طول بازه ندارند، پس کافی است تابع $y = -f(-\frac{x}{3})$ را بررسی کنیم.





در بازهٔ $[9 , 0]$ تابع، اکیداً صعودی است.

۱۲. گزینه ۴ صحیح است.

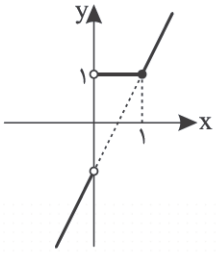
چون $f+2g$ اکیداً نزولی است، پس $-2f-4g$ اکیداً صعودی است، پس $(-2f-4g)+(2f-g) = -5g$ نیز اکیداً صعودی است، پس $-g$ اکیداً صعودی است.

۱۳. گزینه ۱ صحیح است.

۱) $x<۰$ یا $x>۱ \Rightarrow y=x+\frac{x^۲-x}{x}=x+x-۱$

$\Rightarrow y=۲x-۱$

۲) $۰<x\leq ۱ \Rightarrow y=x+\frac{x-x^۲}{x}=x+۱-x=۱$



نمودار تابع به صورت مقابل است. این تابع همواره صعودی است.

۱۴. گزینه ۲ صحیح است.

تابع f با دامنهٔ $[۴ , ۴-]$ اکیداً نزولی است.

$f(x^۲+۴x-۱)\geq f(۴) \Rightarrow x^۲+۴x-۱\leq ۴$

$\Rightarrow x^۲+۴x-۵\leq ۰ \Rightarrow -۵\leq x\leq ۱$

از طرفی باید $۴\leq x^۲+۴x-۱ \leq ۴-$ باشد.

$$\begin{cases} x^۲+۴x-۱\leq ۴ \Rightarrow x^۲+۴x-۵\leq ۰ \Rightarrow -۵\leq x\leq ۱ \\ x^۲+۴x-۱\geq -۴ \Rightarrow x^۲+۴x+۳\geq ۰ \Rightarrow x\leq -۳ , x\geq -۱ \end{cases}$$

اشتراک هر سه شرط بالا به صورت $-۵\leq x\leq -۳$ و $-۱\leq x\leq ۱$ است که شامل ۶ عدد صحیح است.

۱۵. گزینه ۲ صحیح است.

$$\begin{cases} f(x-۱)=۰ \xrightarrow{x=۲} f(۱)=۰ \Rightarrow a+b+۵=۰ \\ f(x+۱)=۰ \xrightarrow{x=-۲} f(-۱)=۰ \Rightarrow -a+b+۱۱=۰ \end{cases}$$

$\Rightarrow a=۳ , b=-۸ \Rightarrow ۲a-b=۱۴$

۱۶. گزینه ۳ صحیح است.

$P(۱)=۰ \Rightarrow ۱+۱+۳+a-۱=۰ \Rightarrow a=-۴$

$R=P(-۱)=(-۱)^{n+۱}+(-۱)^n+۳-a-۱=۲-a=۶$

۱۷. گزینه ۲ صحیح است.

نمودار $x^۳$، ۲ واحد به راست منتقل شده است، پس $\alpha=۲$ است.

$$\begin{cases} f(۲)=۲ \Rightarrow b=۲ \\ f(۰)=۰ \Rightarrow -۸k+۲=۰ \Rightarrow k=\frac{۱}{۴} \end{cases}$$

$\Rightarrow f(x)=\frac{۱}{۴}(x-۲)^۳+۲$

$R=f(-b)=f(-۲)=\frac{۱}{۴}(-۶۴)+۲=-۱۴$

۱۸. گزینه ۳ صحیح است.

فرض کنید $x^۳=t$ پس:

$x^{۲۴}-۱=t^۸-۱=(t+۱)(t^۷-t^۶+t^۵-t^۴+t^۳-t^۲+t-۱)$

$\Rightarrow f(x)=x^{۲۱}-x^{۱۸}+x^{۱۵}-x^{۱۲}+x^۹-x^۶+x^۳-۱$

$\Rightarrow f(۱)=۰ , f(-۱)=-۸ \Rightarrow f(۱)+f(-۱)=-۸$

هندسه

۱۹. گزینه ۳ صحیح است.

تعداد قطرهای هر n ضلعی محدب برابر $\frac{۱}{۲}n(n-۳)$ است. پس $(n+۱)$ ضلعی منتظم $\frac{۱}{۲}(n+۱)(n-۲)$ قطر و $(n+۲)$ ضلعی منتظم $\frac{۱}{۲}(n+۲)(n-۱)$ قطر دارد.

با استفاده از فرض سؤال می‌نویسیم:

$\frac{۱}{۲}(n+۱)(n-۲)\times\frac{۱}{۲}(n+۲)(n-۱)=۱۵(n^۲-۱)$

$\Rightarrow \frac{۱}{۴}(n^۲-۱)(n^۲-۴)=۱۵(n^۲-۱) \xrightarrow{n\neq ۱} n^۲-۴=۶۰$

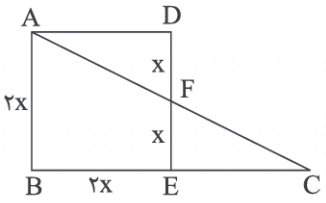
$\Rightarrow n^۲=۶۴ \Rightarrow n=۸$

اندازهٔ یک زاویهٔ داخلی n ضلعی منتظم برابر است با:

$۱۸۰^\circ-\frac{۳۶۰^\circ}{n}=۱۸۰^\circ-\frac{۳۶۰^\circ}{۸}=۱۸۰^\circ-۴۵^\circ=۱۳۵^\circ$

(هندسه دهم، صفحهٔ ۵۵)

۲۰. گزینه ۴ صحیح است.



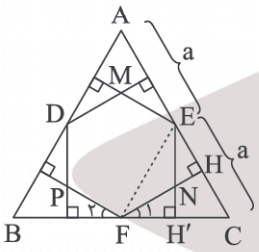
دو مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\Delta}{ADF}$ و $\overset{\Delta}{EFC}$ هم‌نهشت‌اند. پس $DF=EF=x$ و در نتیجه اندازهٔ ضلع مربع ۲x است. بنابراین:

$\frac{S_{\text{ذوزنقه}}}{S_{\text{مربع}}}=\frac{S_{ABEF}}{S_{ABED}}=\frac{\frac{۱}{۲}BE(EF+AB)}{AB^۲}=\frac{\frac{۱}{۲}(۲x)(x+۲x)}{(۲x)^۲}$

$=\frac{۳x^۲}{۴x^۲}=\frac{۳}{۴}\times ٪۱۰۰=٪۷۵$

(هندسه دهم، صفحهٔ ۶۵)

۲۱. گزینه ۴ صحیح است.



فرض کنیم اندازهٔ هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع $\overset{\Delta}{ABC}$ برابر ۲a باشد. در این صورت EF میان‌خط در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ است. پس $EF=\frac{AB}{۲}=a$. در نتیجه مثلث $\overset{\Delta}{EFC}$ متساوی‌الاضلاع به ضلع a است و نقطهٔ N محل همرسی ارتفاع‌های این مثلث می‌باشد. پس محل همرسی میانه‌ها هم هست.

$$\left.\begin{aligned} FN=\frac{۲}{۳}FH=\frac{۲}{۳}(\frac{\sqrt{۳}}{۲}a)=\frac{\sqrt{۳}}{۳}a \\ NE=\frac{۲}{۳}EH'=\frac{۲}{۳}(\frac{\sqrt{۳}}{۲}a)=\frac{\sqrt{۳}}{۳}a \end{aligned}\right\} \Rightarrow NE=NF$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود سایر اضلاع شش‌ضلعی DMENFP مساوی‌اند. در ضمن با توجه به شکل $\hat{F}_۱=\hat{F}_۲=۳۰^\circ$ پس $P\hat{F}N=۱۲۰^\circ$ و به طریق مشابه نتیجه می‌گیریم سایر زاویه‌های شش‌ضلعی DMENFP برابر ۱۲۰° است. پس این شش‌ضلعی منتظم است.

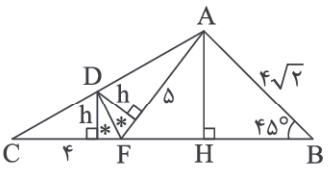
بنابراین:

$\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۳}a \text{ مساحت شش‌ضلعی منتظم به ضلع}}{\text{مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع } ۲a}=\frac{۶(\frac{\sqrt{۳}}{۴}(\frac{\sqrt{۳}}{۳}a)^۲)}{\frac{\sqrt{۳}}{۴}(۲a)^۲}=\frac{۱}{۲}$

(هندسه دهم، صفحهٔ ۶۵)

۲۲. گزینه ۱ صحیح است.

ارتفاع AH را رسم می‌کنیم.



$$\overset{\Delta}{ABH}: AB = 4\sqrt{2},\ B = 45^\circ \Rightarrow AH = BH = 4$$

D از دو ضلع زاویهٔ AFC به یک فاصله است. در دو مثلث $\overset{\Delta}{AFD}$ و $\overset{\Delta}{DFC}$ اندازهٔ دو ارتفاع برابر است. نسبت مساحت‌های این دو مثلث برابر با نسبت اندازه‌های قاعده‌های متناظر این دو ارتفاع است.

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{DFC}}}{S_{\overset{\Delta}{AFD}}} = \frac{CF}{AF} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{DFC}}}{S_{\overset{\Delta}{AFD}}} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{DFC}}}{S_{\overset{\Delta}{AFC}}} = \frac{4}{9} \quad (1)$$

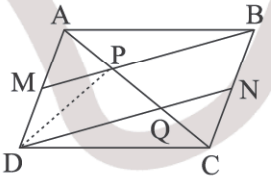
$$S_{\overset{\Delta}{AFC}} = \frac{1}{2} \times AH \times FC \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{AFC}} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4$$

$$\xrightarrow{(1)} \frac{S_{\overset{\Delta}{DFC}}}{8} = \frac{4}{9} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{DFC}} = \frac{32}{9}$$

(هندسه دهم، صفحه‌های ۶۵ و ۶۶)

۲۳. گزینه ۳ صحیح است.

بنابر فرض‌های سؤال شکل زیر را خواهیم داشت:



با توجه به تمرین ۳ صفحهٔ ۶۳ کتاب درسی هندسه دهم $AP = PQ = QC$ است. می‌دانیم میانه، هر مثلث را به دو مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کند. پس:

$$S_{\overset{\Delta}{ADP}} = S_{\overset{\Delta}{DPQ}} = S_{\overset{\Delta}{DQC}} = \frac{1}{3} S_{\overset{\Delta}{ADC}} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} S_{ABCD}\right)$$

$$= \frac{1}{6} S_{ABCD} \quad (1)$$

از طرف دیگر MP میانه در مثلث $\overset{\Delta}{ADP}$ است. پس:

$$S_{\overset{\Delta}{AMP}} = S_{\overset{\Delta}{DMP}} = \frac{1}{2} S_{\overset{\Delta}{ADP}} \xrightarrow{\text{از } (1)} S_{\overset{\Delta}{DMP}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} S_{ABCD}\right)$$

$$= \frac{1}{12} S_{ABCD} \quad (2)$$

بنابراین:

$$S_{MPQD} = S_{\overset{\Delta}{DMP}} + S_{\overset{\Delta}{DPQ}}$$

$$\xrightarrow{(2),(1)\text{ از}} S_{MPQD} = \frac{1}{12} S_{ABCD} + \frac{1}{6} S_{ABCD}$$

$$= \frac{1}{4} S_{ABCD} = \frac{1}{4}(48) = 12\,cm^2$$

(هندسه دهم، صفحه‌های ۶۳ و ۶۷)

۲۴. گزینه ۴ صحیح است.

بنابر قضیه شبه پروانه در ذوزنقه همواره رابطهٔ زیر در ذوزنقهٔ ABCD برقرار است.

$$S_{\overset{\Delta}{OBC}} = S_{\overset{\Delta}{OAD}} = \sqrt{S_{\overset{\Delta}{OAB}} \times S_{\overset{\Delta}{OCD}}} \quad (1)$$

با توجه به $\frac{AB}{CD} = \frac{3}{5}$، داریم:

$$AB \parallel DC \xrightarrow{\text{قضیهٔ اساسی تشابه}} \overset{\Delta}{OAB} \sim \overset{\Delta}{ODC}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{OAB}}}{S_{\overset{\Delta}{ODC}}} = \left(\frac{AB}{DC}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

$$\xrightarrow{S_{\overset{\Delta}{OAB}} = 9} \frac{9}{S_{\overset{\Delta}{ODC}}} = \frac{9}{25} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ODC}} = 25$$

$$\xrightarrow{\text{از } (1)} S_{\overset{\Delta}{OBC}} = S_{\overset{\Delta}{OAD}} = \sqrt{9 \times 25} = 15$$

بنابراین:

$$S_{ABCD} = S_{\overset{\Delta}{OAB}} + S_{\overset{\Delta}{ODC}} + S_{\overset{\Delta}{OBC}} + S_{\overset{\Delta}{OAD}}$$

$$= 9 + 25 + 15 + 15 = 64$$

(هندسه دهم، صفحهٔ ۶۷)

۲۵. گزینه ۳ صحیح است.

$$\text{قطری } A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix},\ \text{اسکالر } B = kI = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$(BA)^3 + C = (k^3 I^3) A^3 + C = k^3 A^3 + C$$

$$= \begin{bmatrix} k^3 a^3 & 0 & 0 \\ 0 & k^3 b^3 & 0 \\ 0 & 0 & k^3 c^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} k^3 a^3 + 1 & 0 & 0 \\ 0 & k^3 b^3 + 4 & 0 \\ 0 & 0 & k^3 c^3 + 9 \end{bmatrix}$$

طبق گفتهٔ سؤال مجموع درایه‌های این ماتریس برابر ۱۶ است. پس:

$$k^3 a^3 + 1 + k^3 b^3 + 4 + k^3 c^3 + 9 = 16$$

$$\Rightarrow k^3 (a^3 + b^3 + c^3) = 2 \quad (1)$$

$$A^3 B^3 = A^3 (kI)^3 = A^3 \times k^3 \times I^3 = k^3 A^3$$

مجموع درایه‌های ماتریس $A^3 B^3$ برابر است با:

$$k^3 (a^3 + b^3 + c^3) \overset{(1)}{=\!=} 2$$

(هندسه دوازدهم، صفحه‌های ۱۱، ۱۲، ۱۶، ۱۸ و ۲۰)

۲۶. گزینه ۲ صحیح است.

$$(A - B)(A + B) = A^2 + AB - BA - B^2$$

بنابراین:

$$(A - B)(A + B) = (A^2 + AB) - (B^2 + BA)$$

$$(A - B)(A + B) = \begin{bmatrix} -6 & -8 \\ 9 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -12 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(A-B)^{-1}\times} A + B = (A - B)^{-1} \times \begin{bmatrix} -9 & -12 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A + B = \frac{1}{3 - 6} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 & -12 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A + B = \frac{-1}{3} \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -12 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

حال ماتریس A را می‌یابیم.

$$\left.\begin{matrix} A-B=\begin{bmatrix} ۳ & -۳ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix} \\ A+B=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{+} ۲A=\begin{bmatrix} ۴ & -۴ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\times\frac{۱}{۲}} A=\begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌های } A = ۳$$

(هندسه دوازدهم، صفحهٔ ۲۲)

۲۷. گزینه ۳ صحیح است.

ابتدا ماتریس $A^{-۱}$ را پیدا می‌کنیم.

$$A^۲+A-I=\bar{o} \Rightarrow A(A+I)=I \Rightarrow A^{-۱}=A+I$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} (A^{-۱})^۲=(A+I)^۲ \Rightarrow (A^۲)^{-۱}=A^۲+I+۲A$$

$$\xrightarrow{A^۲=I-A} (A^۲)^{-۱}=I-A+I+۲A \Rightarrow (A^۲)^{-۱}=۲I+A$$

$$\xrightarrow{A^{-۱}\times} (A^۳)^{-۱}=۲A^{-۱}+I$$

$$\xrightarrow{A^{-۱}=A+I} (A^۳)^{-۱}=۲(A+I)+I \Rightarrow (A^۳)^{-۱}=۲A+۳I$$

(هندسه دوازدهم، صفحهٔ ۲۳)

۲۸. گزینه ۴ صحیح است.

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{b_{ij}=۳^{(i+j-۲)}a_{ij}} B=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & ۳a_{۱۲} & ۹a_{۱۳} \\ ۳a_{۲۱} & ۹a_{۲۲} & ۲۷a_{۲۳} \\ ۹a_{۳۱} & ۲۷a_{۳۲} & ۸۱a_{۳۳} \end{bmatrix}$$

در محاسبهٔ دترمینان B از سطرهای دوم و سوم و همچنین ستون‌های دوم و سوم به ترتیب از ۳ و ۹ می‌توانیم فاکتور بگیریم.

$$|B|=\begin{vmatrix} a_{۱۱} & ۳a_{۱۲} & ۹a_{۱۳} \\ ۳a_{۲۱} & ۹a_{۲۲} & ۲۷a_{۲۳} \\ ۹a_{۳۱} & ۲۷a_{۳۲} & ۸۱a_{۳۳} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |B|=(۳)(۹)(۳)(۹)\begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow ۸۱=(۳)(۹)(۳)(۹)|A| \Rightarrow |A|=\frac{۱}{۹}$$

(هندسه دوازدهم، صفحهٔ ۳۱)

۲۹. گزینه ۲ صحیح است.

از طرفین تساوی داده شده دترمینان می‌گیریم.

$$AB^{-۱}C=-۴I \Rightarrow |AB^{-۱}C|=|-۴I|$$

$$\Rightarrow |A||B^{-۱}||C|=(-۴)^۳|I| \Rightarrow |A|\times\frac{۱}{|B|}\times|C|=-۶۴ \quad (۱)$$

از طرف دیگر:

$$A=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & ۱ \\ \sin\theta & \cos\theta & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{برحسب سطر سوم}]{\text{دترمینان می‌گیریم}} |A|=\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & ۱ \\ \sin\theta & \cos\theta & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{vmatrix}$$

$$=۱(-۱)^۶\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}=\cos^۲\theta+\sin^۲\theta=۱$$

$$B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۳ \\ ۷ & -۱ & ۹ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{برحسب ستون دوم}]{\text{دترمینان می‌گیریم}} |B|=\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۳ \\ ۷ & -۱ & ۹ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{vmatrix}$$

$$=-۱(-۱)^۴\begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix}=۲$$

بنابراین:

$$\text{از (۱)}: ۱\times\frac{۱}{۲}\times|C|=-۶۴ \Rightarrow |C|=-۱۲۸$$

(هندسه دوازدهم، صفحهٔ ۲۷)

۳۰. گزینه ۱ صحیح است.

ابتدا از طرفین ماتریس A دترمینان می‌گیریم.

$$|A|=\begin{vmatrix} -۱ & ۰ & ۱ \\ |A| & ۲ & m \\ ۲ & -۱ & -۱ \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{سطر اول}} |A|=-۱(-۲+m)+۱(-|A|-۴)$$

$$\Rightarrow |A|=۲-m-|A|-۴=-۲-m-|A| \Rightarrow ۲|A|=-m-۲$$

$$\Rightarrow |A|=\frac{-m-۲}{۲}=-\frac{m}{۲}-۱$$

می‌دانیم عدد از دترمینان بیرون بیاید به توان مرتبهٔ ماتریس می‌رسد. پس:

$$|\underbrace{(|A|+۱)}_{\text{عدد}}A^۳|=۸$$

$$\Rightarrow (|A|+۱)^۳|A|^۳=(-\frac{m}{۲}\cancel{\times ۱}\cancel{\times ۱})^۳(-\frac{m}{۲}-۱)^۳=۸$$

$$\Rightarrow (-\frac{m}{۲})^۳(-\frac{m}{۲}-۱)^۳=۲^۳ \Rightarrow [\frac{m}{۲}(\frac{m}{۲}+۱)]^۳=۲^۳$$

$$\Rightarrow \frac{m}{۲}(\frac{m}{۲}+۱)=۲$$

$$\Rightarrow \frac{m^۲}{۴}+\frac{m}{۲}=۲ \xrightarrow{\times ۴} m^۲+۲m-۸=۰$$

$$\Rightarrow (m-۲)(m+۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} m=۲ \\ m=-۴ \end{cases} \xrightarrow{\text{مجموع}} -۲$$

(هندسه دوازدهم، صفحه‌های ۲۷، ۳۰ و ۳۱)

ریاضیات گسسته

۳۱. گزینه ۳ صحیح است.

به جای پیمانه می‌توانیم مقسوم‌علیه‌های آن را قرار دهیم:

$$\left.\begin{matrix} a\overset{۲۱}{\equiv}۱۱ \Rightarrow a\overset{۷}{\equiv}۱۱\overset{۷}{\equiv}۴ \\ a\overset{۱۴}{\equiv}-۱ \Rightarrow b\overset{۷}{\equiv}-۱ \end{matrix}\right\} \Rightarrow a+b\overset{۷}{\equiv}۳$$

$$a^۲+ab=a(a+b)\overset{۷}{\equiv}(۴)۳\overset{۷}{\equiv}۵ \Rightarrow a^۲+ab\in[۵]_۷$$

(ریاضیات گسسته، صفحه‌های ۱۸ تا ۲۰)

۳۲. گزینه ۲ صحیح است.

می‌دانیم $۲۴\overset{۳۰}{\equiv}۵۴$، $۲۸\overset{۳۰}{\equiv}۸۸$ و $(۴, ۳۰)=۲$

$$۲۴a\overset{۳۰}{\equiv}۲۸b \xrightarrow{\div ۴} ۶a\overset{۱۵}{\equiv}۷b$$

گزینهٔ ۱ درست است، چون $۳\,|\,۱۵$ داریم:

$$۶a\overset{۱۵}{\equiv}۷b \Rightarrow ۶a\overset{۳}{\equiv}۷b \xrightarrow[۷\overset{۳}{\equiv}۱]{۶\overset{۳}{\equiv}۰} b\overset{۳}{\equiv}۰ \Rightarrow ۳\,|\,b$$

گزینهٔ ۳ درست است، چون $۵\,|\,۱۵$ داریم:

$$۶a\overset{۱۵}{\equiv}۷b \Rightarrow ۶a\overset{۵}{\equiv}۷b \xrightarrow[۷\overset{۵}{\equiv}۲]{۶\overset{۵}{\equiv}۱} a\overset{۵}{\equiv}۲b$$

گزینهٔ ۴ درست است.

$$۶a \overset{۱۵}{\equiv} ۷b \xrightarrow{\times ۲} ۱۲a \overset{۱۵}{\equiv} ۱۴b \xrightarrow[۱۲ \overset{۱۵}{\equiv} -۳]{۱۴ \overset{۱۵}{\equiv} -۱} -۳a \overset{۱۵}{\equiv} -b \Rightarrow b \overset{۱۵}{\equiv} ۳a$$

(ریاضیات گسسته، صفحه‌های ۱۸ و ۲۲)

۳۳. گزینه ۳ صحیح است.

۴۰۳ و ۳۰۴ به پیمانهٔ m هم‌نهشت هستند.

$$۴۰۳ \overset{m}{\equiv} ۳۰۴ \Rightarrow m \mid ۴۰۳ - ۳۰۴ \Rightarrow m \mid ۹۹ = ۹ \times ۱۱$$

$$\xrightarrow[\text{دورقمی}]{m \text{ عدد اول}} m = ۱۱$$

باقیماندهٔ ۴۰۳ به ۱۱ برابر $r = ۷$ می‌باشد. پس $m + r = ۱۸$ است.

۳۴. گزینه ۱ صحیح است.

اگر رقم یکان دو عدد برابر باشند آن دو عدد پیمانهٔ ۱۰ هم‌نهشت هستند:

$$۲۹a - ۸ \overset{۱۰}{\equiv} a + ۶b \xrightarrow{۲۸ \overset{۱۰}{\equiv} -۲} -۲a \overset{۱۰}{\equiv} ۶b + ۸ \text{ (گزینهٔ ۳)}$$

$$\Rightarrow ۲۸a \overset{۱۰}{\equiv} ۶b + ۸ \xrightarrow[(۲,۱۰)=۵]{\div ۲} ۱۴a \overset{۵}{\equiv} ۳b + ۴$$

$$\xrightarrow{۱۴ \overset{۵}{\equiv} ۴} ۴a \overset{۵}{\equiv} ۳b + ۴ \text{ (گزینهٔ ۴)}$$

$$\xrightarrow{۴ \overset{۵}{\equiv} -۱} -a \overset{۵}{\equiv} ۳b - ۱ \xrightarrow{\times(-۱)} a \overset{۵}{\equiv} ۱ - ۳b \text{ (گزینهٔ ۲)}$$

$$\xrightarrow{\times b} ab \overset{۵}{\equiv} b - ۳b^۲$$

(ریاضیات گسسته، صفحهٔ ۲۳)

۳۵. گزینه ۴ صحیح است.

فرض کنید $\overline{abcd} \overset{۷}{\equiv} r$ باشد.

$$\overline{abcd} \overset{۷}{\equiv} \overline{abc۰} + d \overset{۷}{\equiv} ۱۰\overline{abc} + d \overset{۷}{\equiv} r$$

$$\Rightarrow ۲r \overset{۷}{\equiv} ۲۰\overline{abc} + ۲d \overset{۷}{\equiv} -\overline{abc} + ۲d$$

می‌دانیم $\overline{abc} = ۲d - ۵$ پس داریم:

$$۲r \overset{۷}{\equiv} -۲d + ۵ + ۲d \Rightarrow ۲r \overset{۷}{\equiv} ۵ \overset{۷}{\equiv} ۱۲ \Rightarrow r \overset{۷}{\equiv} ۶$$

(ریاضیات گسسته، صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۳۶. گزینه ۲ صحیح است.

$$A \overset{۹}{\equiv} a + b + c + d + e \overset{۹}{\equiv} e - d + c - b + a \Rightarrow ۲b + ۲d \overset{۹}{\equiv} ۰$$

$$\Rightarrow b + d \overset{۹}{\equiv} ۰ \Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} b & ۰ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & ۸ & ۹ & ۹ & ۰ \\ \hline d & ۹ & ۸ & ۷ & ۶ & ۵ & ۴ & ۳ & ۲ & ۱ & ۰ & ۹ & ۰ \end{array}$$

پس برای انتخاب b و d، ۱۲ حالت داریم:

$$A = \overline{a\,b\,c\,d\,e}$$
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$۹ \times ۱۰ \times ۱۰ \times \underset{\downarrow}{۱۲} = ۱۰۸۰۰$$
$$d, b$$

(ریاضیات گسسته، صفحهٔ ۲۳)

۳۷. گزینه ۱ صحیح است.

ابتدا اولین روز مهرماه را محاسبه می‌کنیم:

$$\underset{\text{فروردین}}{۳۰} + \overbrace{۵ \times ۳۱}^{\text{آخر تابستان}} + \underset{\text{اول مهر}}{۱} \overset{۷}{\equiv} ۲ + ۱۵ + ۱ \overset{۷}{\equiv} ۴$$

کافی است از سه‌شنبه، چهار روز جلو برویم. اول مهرماه شنبه است. پس چهارمین شنبه، ۲۲ مهرماه است.

(ریاضیات گسسته، صفحهٔ ۲۴)

۳۸. گزینه ۳ صحیح است.

$۳ \times ۱۷ = ۵۱$: چون ۱۷ عدد اول است $۴ + ۲m \geq ۱۷$ باید باشد تا عامل ۱۷ در $(۴ + ۲m)!$ وجود داشته باشد:

$$۴ + ۲m \geq ۱۷ \Rightarrow m \geq \frac{۱۳}{۲} \Rightarrow m \geq ۷$$

پس حداقل m برابر ۷ است. کافی است باقیماندهٔ $۷^{۶۲}$ را بر ۴۳ پیدا کنیم:

$$۷^۲ \overset{۴۳}{\equiv} ۶ \xrightarrow{\times ۷} ۷^۳ \overset{۴۳}{\equiv} ۴۲ \overset{۴۳}{\equiv} -۱ \xrightarrow{\text{توان } ۲۰} ۷^{۶۰} \overset{۴۳}{\equiv} ۱$$

$$\xrightarrow{\times ۷^۲} ۷^{۶۲} \overset{۴۳}{\equiv} ۴۹ \overset{۴۳}{\equiv} ۶$$

(ریاضیات گسسته، صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

۳۹. گزینه ۲ صحیح است.

طبق اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$(x+۱)(x^۲ - x + ۱) = x^۳ - ۱$$

اگر $x = ۵^{۲۷۱}$ قرار دهیم، داریم:

$$(۵^{۲۷۱})^۳ - ۱ \overset{۱۲۶}{\equiv} (۵^۳)^{۲۷۱} - ۱ \overset{۱۲۶}{\equiv} (-۱)^{۲۷۱} - ۱ \overset{۱۲۶}{\equiv} -۲ \overset{۱۲۶}{\equiv} ۱۲۴$$

(ریاضیات گسسته، صفحهٔ ۲۱)

۴۰. گزینه ۱ صحیح است.

$$۳^۶ \overset{۱۹}{\equiv} ۷ \Rightarrow ۳^{۶n} \overset{۱۹}{\equiv} ۷^n \Rightarrow ۳^{۶n+۱} \overset{۱۹}{\equiv} ۳ \times ۷^n$$

$$۲^۶ \overset{۱۹}{\equiv} ۷ \Rightarrow ۲^{۶n} \overset{۱۹}{\equiv} ۷^n \Rightarrow ۲^{۶n+۴} \overset{۱۹}{\equiv} ۱۶ \times ۷^n$$

$$\Rightarrow ۳^{۶n+۱} + ۲^{۶n+۴} \overset{۱۹}{\equiv} ۱۹ \times ۷^n \overset{۱۹}{\equiv} ۰$$

پس به ازای تمام مقادیر طبیعی n برقرار است.

(ریاضیات گسسته، صفحه‌های ۲۳ و ۲۴)

فیزیک

۴۱. گزینه ۳ صحیح است.

با توجه به شکل صفحهٔ ۹۱ کتاب درسی

(فیزیک دهم، صفحهٔ ۹۱)

۴۲. گزینه ۳ صحیح است.

$$\left.\begin{array}{l} F_۱ = ۵\theta_۱ \\ F_۱ = \frac{۹}{۵}\theta_۱ + ۳۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \theta_۱ = ۱۰^\circ C \\ F_۱ = ۵۰^\circ F \end{array}$$

$$\Rightarrow \Delta\theta = ۱۵۰^\circ C$$

$$\left.\begin{array}{l} F_۲ = ۲\theta_۲ \\ F_۲ = \frac{۹}{۵}\theta_۲ + ۳۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \theta_۲ = ۱۶۰^\circ C \\ F_۲ = ۳۲۰^\circ F \end{array}$$

(فیزیک دهم، صفحه‌های ۸۴ و ۸۵)

۴۳. گزینه ۱ صحیح است.

الف) درست

ب) نادرست، نمونه‌ای از همرفت طبیعی است.

ج) نادرست، تف‌سنج نوری به عنوان دماسنج معیار انتخاب شده است.

د) نادرست، در روز نسیم از سوی دریا به سمت ساحل می‌وزد.

(فیزیک دهم، صفحه‌های ۱۱۱ تا ۱۱۷)

۴۴. گزینه ۲ صحیح است.

چون طول اولیه برابر است:

$$L_{\circ_A} = L_{\circ_B} = L$$

$$L_B - L_A = ۱۴\times۱۰^{-۴}L$$

$$L(۱+\alpha_B\Delta\theta) - L(۱+\alpha_A\Delta\theta) = ۱۴\times۱۰^{-۴}L$$

$$\Delta\theta(\alpha_B - \alpha_A) = ۱۴\times۱۰^{-۴}$$

$$\Delta\theta(۱/۴\times۱۰^{-۵}) = ۱۴\times۱۰^{-۴}$$

$$\Delta\theta = ۱۰۰^\circ C$$

(فیزیک دهم، صفحهٔ ۹۸)

۴۵. گزینه ۴ صحیح است.

$$m_A = m_B$$

$$\rho_A = ۲\rho_B \ , \ c_A = ۲c_B \ , \ \alpha_A = \frac{۱}{۲}\alpha_B$$

$$Q_A = Q_B \Rightarrow \cancel{m_A} c_A\Delta\theta_A = \cancel{m_B} c_B\Delta\theta_B$$

$$\Rightarrow ۲c_B\times\Delta\theta_A = \Delta\theta_B\times c_B \Rightarrow \Delta\theta_B = ۲\Delta\theta_A$$

$$\Delta V = V_۱(۳\alpha)\Delta\theta$$

$$\frac{\Delta V_A}{\Delta V_B} = \frac{V_A}{V_B}\times\frac{\alpha_A}{\alpha_B}\times\frac{\Delta\theta_A}{\Delta\theta_B} = \frac{\frac{m_A}{\rho_A}}{\frac{m_B}{\rho_B}}\times\frac{\alpha_A}{\alpha_B}\times\frac{\Delta\theta_A}{\Delta\theta_B}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V_A}{\Delta V_B} = \frac{\rho_B}{\rho_A}\times\frac{\alpha_A}{\alpha_B}\times\frac{\Delta\theta_A}{\Delta\theta_B} = \frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۸}$$

(فیزیک دهم، صفحه‌های ۹۱ تا ۹۴ و ۹۸)

۴۶. گزینه ۴ صحیح است.

$$Q_{\text{تبخیر}} = |Q_{\text{انجماد}}|$$

اگر مقدار آب M فرض شود و m گرم از آب یخ می‌زند در این صورت مقدار $(M-m)$ گرم آن تبخیر می‌شود.

$$(M-m)L_V = mL_F$$

$$\frac{M-m}{m} = \frac{L_F}{L_V}$$

$$\frac{M}{m} - ۱ = \frac{L_F}{L_V} \Rightarrow \frac{M}{m} = \frac{L_F}{L_V} + ۱$$

$$\Rightarrow \frac{M}{m} = \frac{L_F + L_V}{L_V} \Rightarrow \frac{m}{M} = \frac{L_V}{L_V + L_F}$$

(فیزیک دهم، مشابه تمرین ۲۲، صفحهٔ ۱۲۶)

۴۷. گزینه ۱ صحیح است.

ابتدا هر دو ماده را به آب صفر درجه می‌رسانیم:

$$Q_{\text{یخ}} = mL_f = ۸۰\times۳۳۶ = ۲۶۸۸۰J$$

$$Q_{\text{آب}} = mc\Delta\theta = ۸۰\times۴/۲\times۱۰ = ۳۳۶۰J$$

بنابراین با مقایسهٔ گرماها، واضح است که گرمایی که آب می‌دهد، نمی‌تواند باعث ذوب کامل یخ شود. پس دمای تعادل همان صفر درجه است. حال مقدار آبی که در اثر ذوب یخ ایجاد می‌شود را حساب می‌کنیم.

$$Q = mL_f \Rightarrow ۳۳۶۰ = m\times۳۳۶ \Rightarrow m = ۱۰g$$

درصد افزایش جرم آب: $\frac{۱۰}{۸۰} = \frac{۱}{۸} = ٪۱۲/۵$

(فیزیک دهم، صفحهٔ ۱۱۷)

۴۸. گزینه ۴ صحیح است.

با فرض ثابت بودن توان:

$$P_۱ = P_۲$$

$$\frac{mc\Delta\theta}{t_۱} = \frac{mL_V}{t_۲}$$

$$\frac{c_{\text{آب}}(۱۰۰-۴۰)}{۱۲} = \frac{۵۴۰\times c_{\text{آب}}}{t_۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۶۰}{۱۲} = \frac{۵۴۰}{t_۲} \Rightarrow t_۲ = ۹\times۱۲ = ۱۰۸\min$$

(فیزیک دهم، صفحهٔ ۱۱۵)

۴۹. گزینه ۳ صحیح است.

وقتی ۴/۲ کیلوژول گرما به مایع داده شده، دمای آن، $۳۰۰^\circ C$ بالا می‌رود و به مرحلهٔ تبخیر می‌رسد. در مرحلهٔ تبخیر نیز با دادن ۰/۱۲ کیلوژول گرما به مایع به طور کامل تبخیر می‌شود. دقت کنید که در مرحلهٔ تبخیر گاز هیچ تغییر دمایی صورت نمی‌گیرد.

۱) $Q = mc\Delta\theta \Rightarrow ۴/۲\times۱۰^۳ = ۱۰۰\times۱۰^{-۳}\times c\times۳۰۰$

$$\Rightarrow c = ۱۴۰\frac{J}{kg^\circ C}$$

۲) $Q = mL_V \Rightarrow ۰/۱۲\times۱۰^۳ = ۱۰۰\times۱۰^{-۳}\times L_V$

$$\Rightarrow L_V = ۱۲۰۰\frac{J}{kg}$$

(فیزیک دهم، صفحه‌های ۹۸، ۱۰۵ و ۱۰۸)

۵۰. گزینه ۲ صحیح است.

میزان حجمی از مایع که بیرون می‌ریزد، اختلاف انبساط مایع و ظرف است.

$$\Delta V = V_\circ(\beta - ۳\alpha)\Delta\theta$$

$$\Delta V = ۵۰۰\times(۲\times۱۰^{-۳} - ۶\times۱۰^{-۵})\times(۵۶-۳۶)$$

$$\Delta V = ۵۰۰\times۲۰\times(۱۰^{-۵})(۲۰۰-۶)$$

$$\Delta V = ۱۹۴\times۱۰^{-۱} = ۱۹/۴\,cm^۳$$

(فیزیک دهم، صفحهٔ ۱۰۱)

۵۱. گزینه ۴ صحیح است.

$$\frac{P_۱V_۱}{T_۱} = \frac{P_۲V_۲}{T_۲} \Rightarrow \frac{P_۱V_۱}{T_۱} = \frac{(\frac{۱۲۰}{۱۰۰})P_۱(\frac{۸۰}{۱۰۰})V_۱}{T_۲}$$

$$\frac{T_۲}{T_۱} = \frac{۹۶}{۱۰۰}$$

بنابراین دمای مطلق باید ۴ درصد کاهش یابد.

(فیزیک دهم، صفحهٔ ۱۲۰)

۵۲. گزینه ۲ صحیح است.

فشارسنج، فشار پیمانه‌ای را نشان می‌دهد. در قانون گازهای کامل باید از فشار مطلق استفاده کنیم.

$$\begin{cases} P_۱ = P_{g_۱} + P_\circ = ۱۵\,atm \\ V_۱ = ۱۲\,lit \\ T_۱ = \theta_۱ + ۲۷۳ = ۲۸۰K \end{cases}$$

$$\Delta F = \frac{۹}{۵}\Delta\theta \Rightarrow ۱۲۶ = \frac{۹}{۵}\Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = ۷۰^\circ C \Rightarrow \Delta T = ۷۰K$$

$$\begin{cases} P_۲ = ? \\ V_۲ = ۲۵\,lit \\ T_۲ = ۷۰ + ۲۸۰ = ۳۵۰K \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{P_۱V_۱}{T_۱} = \frac{P_۲V_۲}{T_۲} \Rightarrow \frac{۱۵\times۱۲}{۲۸۰} = \frac{P_۲\times۲۵}{۳۵۰} \Rightarrow P_۲ = ۹\,atm$$

$۹-۱ = ۸\,atm$ ⟸ عددی که فشارسنج نشان می‌دهد برابر است با:

(فیزیک دهم، صفحه‌های ۱۱۷ تا ۱۲۳)

۵۳. گزینه ۳ صحیح است.

ابتدا تمام مواد را به یخ صفر درجه می‌رسانیم.

$$-۷۰^\circ C_{\text{یخ}} \rightarrow \text{یخ صفر}$$

$$Q_{\text{یخ}} = mc\Delta\theta = ۴۰۰\times\frac{۱}{۲}c\times۷۵ = ۱۴۰۰۰c_{\text{آب}}$$

$$۴۰^\circ C_{\text{آب}} \rightarrow ۰^\circ C_{\text{آب}} \rightarrow ۰^\circ C_{\text{یخ}}$$

$$Q_{\text{آب}} = mc\Delta\theta + mL_f = ۱۰۰\times c\times۴۰ + ۱۰۰\times۸۰c = ۱۲۰۰۰c_{\text{آب}}$$

دمای تعادل کمتر از صفر درجهٔ سلسیوس است.

$$Q_{\text{یخ}} > Q_{\text{آب}} \Rightarrow \theta_e < ۰$$

$$\begin{cases} Q_{\text{باقیمانده}} = ۱۴۰۰۰c - ۱۲۰۰۰c = ۲۰۰۰c_{\text{آب}} \\ m_{\text{کل}} = ۴۰۰ + ۱۰۰ = ۵۰۰g \end{cases}$$

حال باید ببینیم با گرمای باقیمانده دمای یخ چند درجهٔ سلسیوس پایین می‌رود.

$$|Q| = |mc\Delta\theta|$$

$$۲۰۰۰c_{\text{آب}} = ۵۰۰\times\frac{۱}{۲}c_{\text{آب}}\times\Delta\theta$$

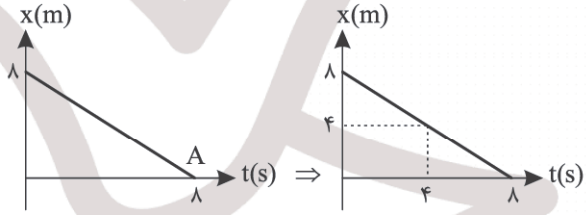
$$|\Delta\theta| = ۸^\circ C \Rightarrow \theta_e = ۰ - ۸ = -۸^\circ C$$

(فیزیک دهم، صفحه‌های ۱۰۸ تا ۱۲۰)

۵۴. گزینه ۱ صحیح است.

کافی است برای هر نمودار مقدار شیب یا همان $\left|\frac{\Delta x}{\Delta t}\right|$ را محاسبه نماییم.

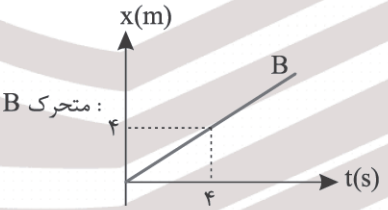
متحرک A :



با توجه به شیب به دست آمده مکان در $t = ۴$ برابر $۴m$ خواهد بود.

$$\text{تندی A} : v_A = \left|\frac{۰-۸}{۸-۰}\right| = ۱\frac{m}{s}$$

متحرک B :



$$v_B = \left|\frac{۴-۰}{۴-۰}\right| = ۱\frac{m}{s}$$

در نتیجه اختلاف تندی این دو متحرک صفر است.

(فیزیک دوازدهم، صفحهٔ ۱۳)

۵۵. گزینه ۲ صحیح است.

اگر زمان موردنظر t فرض شود، داریم:

$$\begin{cases} \text{در حالت اول} : d = ۵(t-۱۲۰) \\ \text{در حالت دوم} : d = ۲(t+۶۰) \end{cases} \Rightarrow ۵(t-۱۲۰) = ۲(t+۶۰)$$

$$\Rightarrow ۵t - ۶۰۰ = ۲t + ۱۲۰ \Rightarrow ۳t = ۷۲۰ \Rightarrow t = ۲۴۰s$$

$$d = ۵(t-۱۲۰) = ۵(۲۴۰-۱۲۰) = ۶۰۰m$$

$$\text{در حالت سوم} : d = vt \Rightarrow ۶۰۰ = v\times۲۴۰ \Rightarrow v = \frac{۶۰}{۲۴} = ۲/۵\frac{m}{s}$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۵۶. گزینه ۴ صحیح است.

الف) درست، زیرا در این بازه، تقعر تابع رو به پایین است. بنابراین بردار شتاب خلاف جهت محور xهاست.

ب) درست، زیرا هم در $t_۱$ و هم در $t_۳$، v صفر است (زیرا شیب خط مماس به نمودار $x-t$ صفر است)، بنابراین Δv و a_{av} نیز صفر خواهد بود.

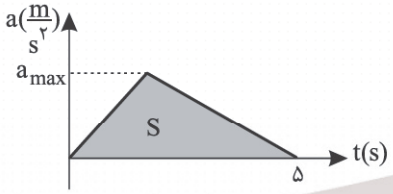
ج) نادرست، زیرا تقعر رو به پایین است، یعنی $a < ۰$ ولی شیب خط مماس‌ها مثبت است. یعنی $v > ۰$

د) درست، زیرا v در $t_۲$ منفی است و در $t_۴$ مثبت است. بنابراین Δv در این بازه مثبت و در نتیجه a_{av} نیز مثبت خواهد بود. ($\vec{a}_{av}$ در جهت محور xهاست)

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۶ تا ۸ و ۱۷)

۵۷. گزینه ۱ صحیح است.

سطح زیر نمودار منحنی شتاب ـ زمان مقدار Δv را نشان می‌دهد. از آنجایی که $v_۰ = -۸\frac{m}{s}$ است، اگر Δv بیشتر از $+۸\frac{m}{s}$ شود، حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده خواهد شد. بنابراین بیشترین مقدار ΔV برای آنکه حرکت در تمام ۵ ثانیه کندشونده باشد، $+۸\frac{m}{s}$ است.



با توجه به اینکه سطح محصور بین منحنی شتاب ـ زمان و محور ـ زمان، تغییرات سرعت است، داریم:

$$\Rightarrow S = \frac{۵\times a_{max}}{۲} = ۸$$

$$\Rightarrow a_{max} = ۳/۲\frac{m}{s^۲}$$

(فیزیک دوازدهم، صفحهٔ ۲۱)

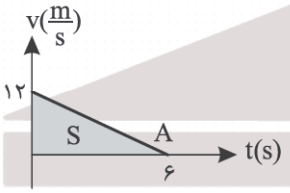
۵۸. گزینه ۲ صحیح است.

منحنی $(v-t)$ یکبار محور زمان را قطع کرده است. پس جهت حرکت یک بار عوض شده است. این منحنی در دو لحظه بیشینه و در دو لحظه کمینه شده است. پس چهار بار شتاب صفر شده و جهت شتاب نیز چهار بار تغییر کرده است.

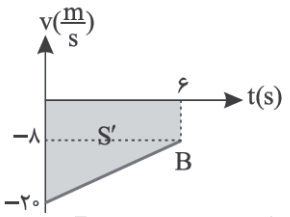
(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۱۱ و ۱۲)

۵۹. گزینه ۳ صحیح است.

ابتدا سطح زیر هر نمودار را از $t = ۰$ تا $t = ۶s$ محاسبه می‌کنیم:



$$S = \frac{۱۲\times۶}{۲} = ۳۶\,m$$



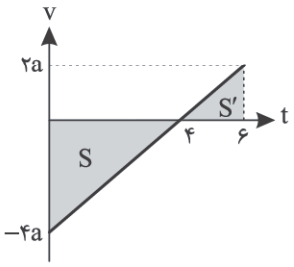
$$S' = \frac{(۲۰+۸)۶}{۲} = ۸۴\,m$$

از لحظهٔ شروع تا $t = ۶s$، متحرک A، ۳۶ متر و متحرک B به اندازهٔ ۸۴ متر طی کرده است. چون در $t = ۶s$ به هم رسیده‌اند، بنابراین فاصلهٔ اولیهٔ آنها $۸۴ + ۳۶$ یعنی ۱۲۰ متر بوده است.

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

۶۰. گزینه ۳ صحیح است.

یکی از بهترین شیوه‌های حل، ترسیم نمودار $(v-t)$ است. (S و S' چون مساحت‌اند مثبت در نظر گرفته شده‌اند.)



$$\left.\begin{matrix} t=0 \Rightarrow x_0 = 8m \\ t=6s \Rightarrow x_6 = 2m \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta x = 2-8 = -6m$$

$$S = \frac{4(4a)}{2} = 8a$$

$$S' = \frac{2(2a)}{2} = 2a$$

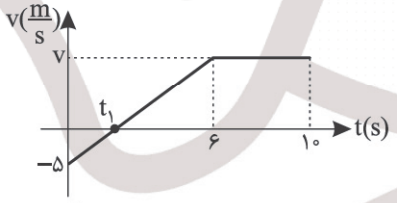
$$\Delta x = -6m \Rightarrow -S + S' = -6$$

$$2a - 8a = -6 \Rightarrow a = 1\frac{m}{s^2}$$

(فیزیک دوازدهم، صفحهٔ ۱۷)

۶۱. گزینه ۴ صحیح است.

اگر سرعت نهایی متحرک در $t = 10s$ را v فرض کنیم، داریم:



$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

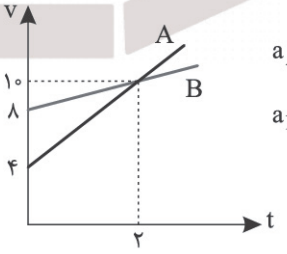
$$2 = \frac{v-(-5)}{10} \Rightarrow v = 15\frac{m}{s}$$

در بازهٔ زمانی $0 < t < t_1$ حرکت متحرک کندشونده است و شتاب متوسط در این بازه با شتاب متوسط در بازهٔ زمانی $0 < t < 6s$ یکسان است.

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{15-(-5)}{6} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}\frac{m}{s^2}$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۶۲. گزینه ۴ صحیح است.



$$a_A = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{6}{2} = 3\frac{m}{s^2},\ v_{0_A} = 4\frac{m}{s}$$

$$a_B = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{2}{2} = 1\frac{m}{s^2},\ v_{0_B} = 8\frac{m}{s}$$

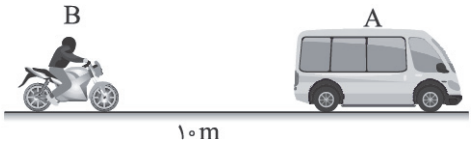
در لحظهٔ سبقت $\Delta x_A = \Delta x_B$ است و با توجه به رابطهٔ $\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$ داریم:

$$\frac{1}{2}\times 3t^2 + 4t = \frac{1}{2}t^2 + 8t \Rightarrow t = 4s$$

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{v_{0A} + a_A t}{v_{0B} + a_B t} = \frac{4+3\times 4}{8+1\times 4} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

(فیزیک دوازدهم، صفحهٔ ۲۲)

۶۳. گزینه ۲ صحیح است.



اگر مبدأ مکان را نقطهٔ شروع حرکت موتورسوار فرض کنیم، با استفاده از معادلهٔ $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$ داریم:

معادلهٔ مکان ـ زمان اتوبوس:

$$x_A = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 = 2t^2 + 10t + 10$$

معادلهٔ مکان ـ زمان موتورسوار:

$$x_B = vt$$

$$x_A = x_B \xrightarrow{t=5s} 2(5)^2 + 10(5) + 10 = v\times 5$$

$$110 = 5v \Rightarrow v = 22\frac{m}{s}$$

(فیزیک دوازدهم، صفحهٔ ۲۱)

۶۴. گزینه ۲ صحیح است.

طبق رابطهٔ حرکت با شتاب ثابت:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t\ ,\ v_0 = 0$$

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta x_{کل}} = \left(\frac{t_1}{t_1+t_2}\right)^2$$

$$\frac{49}{121} = \left(\frac{t_1}{t_1+t_2}\right)^2 \Rightarrow$$ از طرفین جذر می‌گیریم.

$$\frac{7}{11} = \frac{t_1}{t_1+t_2}$$

$$4t_1 = 7t_2 \Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \frac{7}{4}$$

(فیزیک دوازدهم، صفحهٔ ۱۷)

۶۵. گزینه ۴ صحیح است.

در لحظهٔ $t = 2s$ سرعت متحرک صفر است. پس برای بازهٔ زمانی $t_1 = 2s$ تا $t_2 = 5s$ می‌توان گفت:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + (v_{t=2s})\times t$$

$$-36 = \frac{1}{2}a(3)^2 + 0 \Rightarrow a = -8\frac{m}{s^2}$$

از رابطهٔ $\Delta x = -\frac{1}{2}at^2 + vt$ برای ۲ ثانیهٔ اول داریم:

$$\Delta x' = -\frac{1}{2}at^2$$

$$\Delta x' = -\frac{1}{2}(-8)(2)^2 = 16 \Rightarrow 36 - x_0 = 16 \Rightarrow x_0 = 20m$$

(فیزیک دوازدهم، صفحهٔ ۱۶)

۶۶. گزینه ۱ صحیح است.

چون سرعت ثابت است، پس سرعت متوسط و لحظه‌ای با هم برابر است:

$$v = v_{av} = 5\frac{m}{s}$$

$$x = vt + x_0 \Rightarrow x = 5t - 15$$

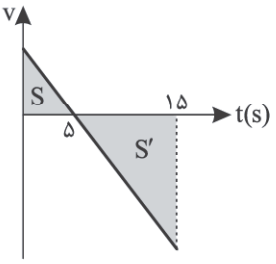
$$15 = 5t - 15 \Rightarrow t = 6s$$

(فیزیک دوازدهم، صفحهٔ ۱۴)

۶۷. گزینه ۳ صحیح است.

با توجه به اطلاعات مسئله به راحتی می‌توان نمودار $(v-t)$ را رسم نمود و از روی سطح زیر نمودار میزان مسافت و جابه‌جایی را برحسب هم به دست آورد.

چون جابه‌جایی در دو ثانیهٔ سوم $(۴ < t < ۶)$ صفر است، بنابراین در وسط این بازه یعنی $t = ۵\,s$ علامت سرعت عوض شده است.



با توجه به نمودار و نسبت تشابه مثلث‌ها داریم: $S' = ۴S$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{مسافت}: S + S' = ۵S \\ \text{بزرگی جابه‌جایی}: |S - S'| = ۳S \end{cases} \Rightarrow \text{پاسخ نهایی}: \frac{۵S}{۳S} = \frac{۵}{۳}$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

۶۸. گزینه ۴ صحیح است.

$$|\Delta y| = \frac{۱}{۲}gt^۲ \Rightarrow ۲۴۰ = ۵t^۲ \Rightarrow t^۲ = ۴۸ \Rightarrow t = ۴\sqrt{۳}\,s$$

بنابراین این حرکت در ۴ بازهٔ متوالی به میزان $\sqrt{۳}$ ثانیه در هر بازه انجام شده است. کافی است مسافت طی شده در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۳\sqrt{۳}\,s$ تا $t_۲ = ۴\sqrt{۳}\,s$ را به دست آوریم.

$$\Delta y = \frac{۱}{۲}gt^۲ = ۵t^۲$$

$$t_۱ = ۳\sqrt{۳}\,s \Rightarrow \Delta y_۱ = ۵\times۹\times۳ = ۱۳۵\,m$$

$$t_۲ = ۴\sqrt{۳}\,s \Rightarrow \Delta y_۲ = ۵\times۱۶\times۳ = ۲۴۰\,m$$

$$\Delta y = \Delta y_۲ - \Delta y_۱ = ۲۴۰ - ۱۳۵ = ۱۰۵\,m$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۶۹. گزینه ۲ صحیح است.

اگر کل زمان حرکت، t و ارتفاع محل رها شدن جسم، h فرض شود با استفاده از رابطهٔ $|\Delta y| = \frac{۱}{۲}gt^۲$ داریم:

$$h = \frac{۱}{۲}gt^۲ \Rightarrow h = ۵t^۲$$

$$h - ۹۰ = \frac{۱}{۲}g(t-۳)^۲ \Rightarrow h - ۹۰ = ۵(t-۳)^۲$$

با کم کردن این دو معادله از هم داریم:

$$۹۰ = ۵(t^۲ - (t-۳)^۲) \Rightarrow ۱۸ = ۶t - ۹ \Rightarrow ۶t = ۲۷ \Rightarrow t = \frac{۹}{۲}\,s$$

$$\Rightarrow v = gt = ۱۰\times\frac{۹}{۲} = ۴۵\,\frac{m}{s}$$

(فیزیک دوازدهم، صفحهٔ ۲۰)

۷۰. گزینه ۳ صحیح است.

$$|\Delta y| = \frac{۱}{۲}gt^۲$$

$$\frac{۱}{۴}h = \frac{۱}{۲}\times۱۰\times(۵)^۲ \Rightarrow h = ۵۰۰\,m$$

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲g\Delta y$$

$$v^۲ - ۰ = ۲۰\times۵۰۰ = ۱۰۰۰۰ \Rightarrow v = ۱۰۰\,\frac{m}{s}$$

(فیزیک دوازدهم، صفحهٔ ۲۲)

شیمی

۷۱. گزینه ۲ صحیح است.

آب دریاها مخلوطی همگن از انواع یون‌ها و مولکول‌ها در آب است.

(شیمی دهم، صفحه‌های ۸۶ تا ۹۱)

۷۲. گزینه ۴ صحیح است.

فرمول شیمیایی این ترکیبات و نسبت خواسته شده به ترتیب برابر است با:

۱) $(NH_۴)_۲CO_۳$ $\quad \frac{۲+۱}{۲\times۵+۴} = \frac{۳}{۱۴}$

۲) $CaSO_۴$ $\quad \frac{۱+۱}{۱+۵} = \frac{۲}{۶}$

۳) $Mg(OH)_۲$ $\quad \frac{۱+۲}{۱+۲\times۲} = \frac{۳}{۵}$

۴) $(NH_۴)_۳PO_۴$ $\quad \frac{۳+۱}{۳\times۵+۵} = \frac{۴}{۲۰}$

(شیمی دهم، صفحهٔ ۹۲)

۷۳. گزینه ۱ صحیح است.

بررسی عبارت‌های نادرست:

آ) این ترکیب $NaCl$ است که به روش فیزیکی تبلور از آب دریا استخراج می‌شود.

ب) $SO_۴^{۲-}$ و $NO_۳^-$ ساختار لوویس و در نتیجه مدل فضاپرکن کاملاً متفاوتی دارند.

پ) آب دریا یکی از منابع تهیه فلز منیزیم است.

(شیمی دهم، صفحه‌های ۸۷، ۹۱ و ۹۷)

۷۴. گزینه ۴ صحیح است.

بررسی عبارت‌ها:

آ) این واکنش برای شناسایی یون $Ba^{۲+}$ انجام می‌شود.

ب) معادلهٔ موازنه‌شدهٔ این ۲ واکنش به صورت زیر است:

$$BaCl_۲(aq) + Na_۲SO_۴(aq) \rightarrow BaSO_۴(s) + ۲NaCl(aq)$$

$$AgNO_۳(aq) + NaCl(aq) \rightarrow AgCl(s) + NaNO_۳(aq)$$

پ) فراوردهٔ مرحلهٔ نخست استخراج Mg ، $Mg(OH)_۲$ است که مانند $BaSO_۴$ در آب نامحلول بوده و به شکل رسوب (s) تولید می‌شود.

ت) چون حجم محلول نهایی از حجم هر ۲ محلول ابتدایی بیشتر است، پس غلظت تمامی یون‌ها کاهش یافته است. چه یون‌هایی که هنوز در حالت محلول مانده‌اند (Na^+ , Cl^-) و چه یون‌هایی که رسوب کرده‌اند و از محلول خارج شده‌اند $(Ba^{۲+} , SO_۴^{۲-})$.

(شیمی دهم، صفحه‌های ۸۹، ۹۰ و ۹۸)

۷۵. گزینه ۱ صحیح است.

ابتدا غلظت مولار هر ۴ محلول را محاسبه می‌کنیم:

$$M_۱ = \frac{۴\times۰/۰۲}{۵۰\times۱۰^{-۳}} = ۱/۶\,\frac{mol}{L} \qquad M_۲ = \frac{۱۲\times۰/۰۲}{۵۰\times۱۰^{-۳}} = ۴/۸\,\frac{mol}{L}$$

$$M_۳ = \frac{۶\times۰/۰۲}{۲۵\times۱۰^{-۳}} = ۴/۸\,\frac{mol}{L} \qquad M_۴ = \frac{۸\times۰/۰۲}{۲۵\times۱۰^{-۳}} = ۶/۴\,\frac{mol}{L}$$

پس غلظت مولار محلول ۴ از بقیه بیشتر بوده و غلظت مولار محلول‌های ۲ و ۳ نیز با هم برابر خواهد بود.

با مخلوط کردن محلول‌های ۱ و ۴ با همدیگر خواهیم داشت:

$$M_۵ = \frac{(۴+۸)\times۰/۰۲}{(۵۰+۲۵)\times۱۰^{-۳}} = \frac{۰/۲۴}{۷۵\times۱۰^{-۳}} = ۳/۲ mol.L^{-۱}$$

(شیمی دهم، صفحهٔ ۹۹)

۷۶. گزینه ۴ صحیح است.

در واکنش پایانی استخراج منیزیم از آب دریا یک گاز و دو مذاب حضور دارند:

$$MgCl_۲(l) \rightarrow Mg(l) + Cl_۲(g)$$

توضیح گزینه ۳: در یکی از مراحل استخراج منیزیم از آب دریا، رسوب $Mg(OH)_۲$ در واکنش با HCl به $MgCl_۲$ تبدیل می‌شود.

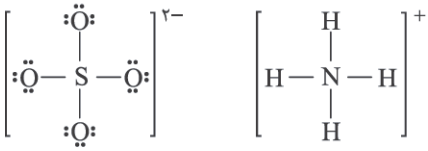
(شیمی دهم، صفحهٔ ۹۸)

۷۷. گزینه ۴ صحیح است.

بررسی عبارت‌های نادرست:

آ) از انحلال هر مول از آن در آب، ۳ مول یون تولید می‌شود.

پ) با توجه به فرمول شیمیایی $(NH_4)_2SO_4$ و ساختار لوویس این یون‌ها، نسبت درست $\frac{12}{8}$ است.



ت) در یون‌های چنداتمی همچون سولفات، بار یون به کل یون تعلق دارد نه به یک اتم خاص.

(شیمی دهم، صفحهٔ ۹۲)

۷۸. گزینه ۳ صحیح است.

موارد (آ)، (پ) و (ث) نادرست هستند و شکل درست آنها به صورت زیر است:

آ) سرکهٔ خوراکی با خاصیت اسیدی ملایم، محلول ۵ درصد جرمی استیک اسید در آب است.

پ) در یک لیتر از محلول مولار (یک مولار) سدیم نیترات، در مجموع ۲ مول یون Na^+ و NO_3^- وجود دارد.

ث) تجربه نشان می‌دهد که اندازه‌گیری حجم مواد مایع (به ویژه در آزمایشگاه) آسان‌تر از جرم آنها است.

(شیمی دهم، صفحه‌های ۹۲، ۹۴ و ۹۸)

۷۹. گزینه ۲ صحیح است.

یک محلول می‌تواند بیش از چند حل‌شونده داشته باشد.

(شیمی دهم، صفحه‌های ۹۳ و ۹۴)

۸۰. گزینه ۱ صحیح است.

ابتدا به کمک چگالی و درصد جرمی محلول جرم NaOH را محاسبه می‌کنیم و سپس به مول Na^+ می‌رسیم.

$$NaOH(s) \rightarrow Na^+(aq) + OH^-(aq)$$

$$\text{جرم محلول}: 1/2\frac{g}{mL} = \frac{x}{200mL} \Rightarrow x = 240g$$

$$\%20 = \frac{y}{240} \times 100 \Rightarrow y = 48g\ NaOH$$

با توجه به فرایند انحلال:

$$48g\ NaOH \times \frac{1mol\ NaOH}{40g\ NaOH} \times \frac{1mol\ Na^+}{1mol\ NaOH} = 1/2\ mol\ Na^+$$

(شیمی دهم، صفحهٔ ۹۶)

۸۱. گزینه ۱ صحیح است.

ابتدا جرم Ca^{2+} مجاز در ۵ متر مکعب آب مخزن $(5\times10^6 g)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$100ppm = \frac{x}{5\times10^6} \times 10^6 \Rightarrow x = 500g\ Ca^{2+}$$

در حالی که در این مخزن ۲۰ مول معادل ۸۰۰g کلسیم وجود دارد، پس باید ۳۰۰g از این یون با سدیم فسفات رسوب داده شود.

$$2Na_3PO_4(aq) + 3Ca^{2+}(aq) \rightarrow Ca_3(PO_4)_2(s) + 6Na^+(aq)$$

$$300g\ Ca^{2+} \times \frac{1mol\ Ca^{2+}}{40g\ Ca^{2+}} \times \frac{2mol\ Na_3PO_4}{3mol\ Ca^{2+}} \times \frac{164g\ Na_3PO_4}{1mol\ Na_3PO_4}$$
$$= 820g\ Na_3PO_4$$

(شیمی دهم، صفحهٔ ۹۵)

۸۲. گزینه ۴ صحیح است.

جرم مادهٔ حل‌شده در دو محلول KOH و NaOH = m

حجم دو محلول KOH و NaOH = V

$$?mol\ NaOH = \frac{m}{40}mol$$

$$M = \frac{n}{V} \Rightarrow 1/5 = \frac{\frac{m}{40}}{V} \Rightarrow \frac{m}{V} = 1/5\times40 = 60$$

$$?mol\ KOH = \frac{m}{56}mol$$

$$M = \frac{n}{V} \Rightarrow M = \frac{\frac{m}{56}}{V} = \frac{1}{56}\times\frac{m}{V} = \frac{60}{56} \Rightarrow M \simeq 1/07 mol.L^{-1}$$

(شیمی دهم، صفحهٔ ۹۷)

۸۳. گزینه ۱ صحیح است.

$$\text{محلول اول}: V(L)\times2\frac{mol}{L} = 2V\ mol$$

$$\text{محلول دوم}: \frac{1}{2}L\times4\frac{mol}{L} = 2mol$$

$$\text{محلول نهایی}: \frac{1mol}{L} = \frac{(2V+2)mol}{20L} \Rightarrow 2V+2 = 20 \Rightarrow V = 9L$$

$$3NaOH(aq) + FeCl_3(aq) \rightarrow Fe(OH)_3(s) + 3NaCl(aq)$$

$$Fe(OH)_3 = 107\ g.mol^{-1}$$

$$5L\times\frac{1mol\ NaOH}{1L}\times\frac{1mol\ Fe(OH)_3}{3mol\ NaOH}\times\frac{107g\ Fe(OH)_3}{1mol\ Fe(OH)_3}$$
$$= 178/3g\ Fe(OH)_3$$

(شیمی دهم، صفحهٔ ۹۷)

۸۴. گزینه ۳ صحیح است.

شکل درست دیگر گزینه‌ها:

۱) بازها در تماس با پوست احساس لیزی ایجاد می‌کنند، اما به آن آسیب می‌رسانند.

۲) اسیدهای خوراکی مزهٔ ترش و بازها مزهٔ تلخ دارند.

۴) برای کاهش میزان اسیدی بودن خاک (افزایش pH) به آن آهک می‌افزایند.

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

۸۵. گزینه ۳ صحیح است.

توجه کنید که در عبارت (پ)، یک محلول اسیدی (HCN) و یک محلول بازی (Rb_2O) با هم مقایسه شده‌اند که با مدل آرنیوس ممکن است. در حالی که مقایسهٔ $[H^+]$ در دو محلول اسیدی طبق این مدل امکان‌پذیر نیست.

بررسی موارد نادرست:

ب) هر چه $[H^+]$ در یک محلول بیشتر باشد، آن محلول اسیدی‌تر است، یعنی خاصیت اسیدی بیشتری دارد و لزوماً اسید آن قوی‌تر (K_a بیشتر) نیست.

ت) اسیدها و بازهای ضعیف الکترولیت قوی نیستند و به طور ناقص و جزئی در آب یونیده می‌شوند.

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸ و ۲۳)

۸۶. گزینه ۲ صحیح است.

موارد (آ) و (ت) درست هستند.

بررسی عبارت‌ها:

آ) Na_2O برخلاف NH_3 یک الکترولیت قوی است و در آب کاملاً تفکیک می‌شود و در غلظت یکسان یون‌های بیشتری در محلول آن وجود دارد.

ب) در میان این مواد تنها Na_2O و NH_3 باز هستند و محلول آنها کاغذ pH را آبی می‌کند.
پ) دو ترکیب $AgCl$ و Na_2O یونی هستند، اما $AgCl$ یک رسوب است و به مقدار ناچیزی در آب حل می‌شود، پس محلول آن برخلاف محلول Na_2O رسانایی الکتریکی بسیار کمی دارد.
ت) از میان مواد گفته شده، تنها در اثر انحلال یک مول Na_2O، ۴ مول یون به محلول افزوده می‌شود:

$$Na_2O(s) + H_2O(l) \rightarrow 2Na^+(aq) + 2OH^-(aq)$$

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۱۴ تا ۱۷)

۸۷. گزینه ۳ صحیح است.

در یک سامانهٔ تعادلی، سرعت تولید و مصرف هر گونه برابر است. اما رابطهٔ میان سرعت‌های گونه‌های مختلف به نسبت ضرایب استوکیومتری آنها بستگی دارد.

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

۸۸. گزینه ۲ صحیح است.

بررسی عبارت‌ها:
آ) HX یک اسید قوی بوده و یونش آن کامل است. پس درجه یونش آن برابر یک خواهد بود.
ب) سرعت واکنش اسیدها با فلز منیزیم به $[H^+]$ بستگی دارد و می‌توان محلولی از HA تهیه کرد که غلظت H^+ در آن بیشتر از محلول HX باشد.
پ) HA و HX اسید تک‌پروتون‌دار هستند و در میان اسیدهای موجود در باران معمولی و باران اسیدی (H_2CO_3، HNO_3 و H_2SO_4) تنها اسید HNO_3 تک‌پروتون‌دار است که نمودار آن همانند نمودار اسید قوی HX خواهد بود.
ت) چون HA اسید ضعیف‌تری از HX است، در شرایط یکسان غلظت یون‌ها و در نتیجه رسانایی الکتریکی محلول آن پایین‌تر است.

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۱۸ و ۲۴)

۸۹. گزینه ۴ صحیح است.

فرمیک اسید یک اسید ضعیف بوده و یونش آن جزئی است. پس در محلول آن تعداد زیادی مولکول یونیده‌نشده، با تعداد اندکی یون در تعادل هستند.

(شیمی دوازدهم، صفحهٔ ۲۳)

۹۰. گزینه ۳ صحیح است.

اگر تعداد اولیه مولکول‌های اسید را با N نمایش دهیم، داریم:

	HA	$\rightleftharpoons$	H^+	+	A^-
مقدار اولیه	N		0		0
مقدار تعادلی	$N-N\alpha$		$N\alpha$		$N\alpha$

$$\text{مجموع کل ذره‌ها} = 550 = N - N\alpha + N\alpha + N\alpha$$
$$\Rightarrow 550 = N + N\alpha = 500 + 500\alpha \Rightarrow 500\alpha = 50 \Rightarrow \alpha = 0/1$$

(شیمی دوازدهم، صفحهٔ ۱۹)

۹۱. گزینه ۳ صحیح است.

چون اسید بسیار ضعیف است، می‌توانیم از رابطهٔ تقریبی زیر برای K_a استفاده کنیم:

$$K_a \simeq M\alpha^2 \Rightarrow K_a = (M\alpha)\alpha = [H^+]\alpha$$
$$\Rightarrow 10^{-5} = 10^{-2} \times \alpha \Rightarrow \alpha = 10^{-3}$$

درجه یونش:
پس درصد یونش برابر است با: $\alpha = 0/1\%$.

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۹۲. گزینه ۱ صحیح است.

با توجه به مقادیر K_a برای این دو اسید، می‌دانیم HB اسید قوی‌تری است و در غلظت یکسان α آن نیز بزرگ‌تر خواهد بود، حال به بررسی موارد می‌پردازیم.
آ) غلظت یون‌های تولیدی در هر دو واکنش با هم برابر است، در نتیجه تفاوت غلظت آنها در هر دو محلول برابر صفر بوده و با هم برابر است.
ب) مجموع غلظت تعادلی گونه‌ها در هر محلول برابر است با:

$$HA: [H^+] + [A^-] + [HA] = M\alpha + M\alpha + M - M\alpha$$
$$\Rightarrow M + M\alpha$$
$$HB: [H^+] + [A^-] + [HB] = M\alpha' + M\alpha' + M - M\alpha'$$
$$= M + M\alpha'$$

چون غلظت اسیدها برابر است و HB اسید قوی‌تری است پس:

$$\alpha' > \alpha \Rightarrow M + M\alpha' > M + M\alpha$$

پ) غلظت تعادلی آنیون با $[H^+]$ برابر است. هر چه یک اسید ضعیف‌تر باشد، یونش آن ناقص‌تر بوده و غلظت تعادلی اسید (اسید یونیده‌نشده) در آن بیشتر و غلظت آنیون آن کمتر خواهد بود. پس نسبت خواسته‌شده برای اسید ضعیف‌تر HA بیشتر خواهد بود.
ت) در دما و غلظت یکسان از اسیدها، $[H^+]$ در محلول اسید قوی‌تر (HB) بالاتر خواهد بود.

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۹۳. گزینه ۲ صحیح است.

مقدار اسید اولیه و غلظت اولیهٔ آن برابر است با:

$$50\,g\,HA \times \frac{1\,mol\,HA}{200\,g\,HA} = 2/5\,mol\,HA$$
$$M = \frac{2/5}{5} = 0/5\,mol.L^{-1}$$

با توجه به غلظت تعادلی H^+، داریم:

$$[H^+] = M\alpha = 0/1$$
$$K_a = \frac{(M\alpha)(M\alpha)}{M - M\alpha} \Rightarrow K_a = \frac{(0/1)(0/1)}{0/5 - 0/1} = 0/025$$

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۹۴. گزینه ۲ صحیح است.

با توجه به تعریف K_a داریم:

$$K_a = \frac{[H^+][A^-]}{[HA]} = \frac{(M\alpha)(M\alpha)}{M - M\alpha}$$
$$K_a = 0/1 = \frac{(0/1)(0/1)}{M - 0/1} \Rightarrow M - 0/1 = 0/1 \Rightarrow M = 0/2\,mol.L^{-1}$$

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۹۵. گزینه ۳ صحیح است.

شکل درست سایر عبارت‌ها:
۱) مقایسهٔ قدرت اسیدی (K_a) این اسیدها به صورت زیر است:

$$HCl > HNO_2 > HCOOH > H_2CO_3$$

۲) H_3PO_4 یک اسید سه‌پروتون‌دار و HNO_3 یک اسید تک‌پروتون‌دار است اما قدرت اسیدها به میزان یونش آنها بستگی دارد و HNO_3 قوی‌تر است. چون برخلاف H_3PO_4 کامل یونیده می‌شود.
۴) در کربوکسیلیک اسیدها، تنها هیدروژن گروه کربوکسیل می‌تواند به صورت H^+ یا H_3O^+ وارد محلول شود.

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۱۹ و ۲۳)